→ p. 176 du manuel

Chapitre 7

EXERCICE 17 **p. 176**

Réseau de distribution électrique d'un hameau et d'une ferme

Présentation de la modélisation

Un réseau de distribution électrique comprend deux postes source S_1 et S_2 distribuant respectivement des courants électriques d'intensité I_1 et I_2. Un hameau est alimenté par ces deux postes source tandis qu'une ferme isolée est alimentée uniquement par le poste source S_1.

Afin que la puissance dissipée par effet Joule dans l'ensemble du réseau électrique soit minimale, la fonction f à minimiser a été déterminée à partir de la modélisation suivante :

- chaque ligne électrique du réseau est modélisée par un circuit électrique constitué d'un conducteur ohmique, de résistance r, dans lequel circule un courant électrique supposé continu d'intensité I. Dans le cadre de cette modélisation, la puissance dissipée par effet Joule est égale à : $\mathcal{P}_J = r\,I^2$;
- la résistance de chaque ligne électrique est égale à : r = 1 ohm (Ω) ;
- l'intensité du courant électrique utilisé par la ferme vaut : I'_1 = 60 ampères (A) ;
- l'intensité du courant électrique utilisé par le hameau vaut : I'_2 = 120 A ;
- l'intensité maximale du courant électrique distribuée par le poste source S_1 est égale à : $I_{1,\max}$= 600 A ;
- l'intensité maximale du courant électrique distribuée par le poste source S_2 est égale à : $I_{2,\max}$= 180 A ;
- la tension U est la même dans chacune des lignes électriques du réseau.

La puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans le réseau est égale à :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_J = r\,I_1^2 + r\,I_2^2 + r\,(I'_2 - I_2)^2 + r\,I'^2_1 \qquad \text{avec } 0 \leq I_1 \leq I_{1,\max} \text{ et } 0 \leq I_2 \leq I_{2,\max}.}$$

Ainsi : $\mathcal{P}_J = r\,(I_1^2 + I_2^2 + (I'_2 - I_2)^2 + I'^2_1) = r\,(I_1^2 + I_2^2 + (I'^2_2 - 2\,I'_2\,I_2 + I_2^2) + I'^2_1)$

$$\mathcal{P}_J = r\,(I_1^2 + 2\,I_2^2 - 2\,I'_2\,I_2 + I'^2_1 + I'^2_2).$$

Or : $I_1 = I'_1 + I'_2 - I_2$, d'où : $\mathcal{P}_J = r\,((I'_1 + I'_2 - I_2)^2 + 2\,I_2^2 - 2\,I'_2\,I_2 + I'^2_1 + I'^2_2)$

$$\mathcal{P}_J = r\,((I'_1 + I'_2)^2 - 2(I'_1 + I'_2)\,I_2 + I_2^2 + 2\,I_2^2 - 2\,I'_2\,I_2 + I'^2_1 + I'^2_2)$$

$$\mathcal{P}_J = r\,(I_2^2 + 2\,I_2^2 - 2\,I'_2\,I_2 - 2(I'_1 + I'_2)\,I_2 + (I'_1 + I'_2)^2 + I'^2_1 + I'^2_2).$$

Finalement : $\boldsymbol{\mathcal{P}_J = r\,(3\,I_2^2 - 2\,(I'_1 + 2\,I'_2)\,I_2 + (I'_1 + I'_2)^2 + I'^2_1 + I'^2_2) \quad \text{avec } 0 \leq I_2 \leq I_{2,\max}.}$

A.N. : $\mathcal{P}_J = 3\,I_2^2 - 2\,(60 + 2 \times 120)\,I_2 + 180^2 + 60^2 + 120^2$ avec $0 \leq I_2 \leq 180$ A

$$\mathcal{P}_J = 3\,I_2^2 - 600\,I_2 + 50\,400 \qquad \text{avec } 0 \leq I_2 \leq 180 \text{ A.}$$

La fonction f à minimiser s'écrit donc, avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I_2}$ en ampère (A) :

$$\boldsymbol{f(x) = 3\,x^2 - 600\,x + 50\,400 \qquad \text{avec } 0 \leq x \leq 180.}$$

<u>Remarque</u> : *comme le poste source S_2 alimente uniquement le hameau, il serait également possible de considérer que $0 \leq I_2 \leq I'_2$ et donc que $0 \leq x \leq 120$.*