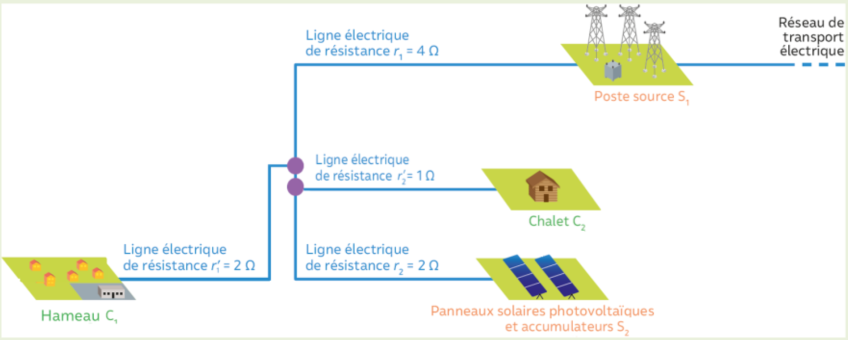
→ p. 177 du manuel

Chapitre 7 EXERCICE 18 p. 177

Réseau électrique avec des panneaux photovoltaïques

Aides mathématiques

Utilisation d'une fonction dérivée, d'une application ou d'un logiciel dédié à la géométrie et à l'algèbre et/ou d'une forme canonique



L'objectif est de minimiser la fonction f définie par $f(x) = 6x^2 - 640x + 96\,300$ sur l'intervalle [70 ; 160].

Utilisation de la dérivée de la fonction *f*

1) Déterminer la dérivée de la fonction *f*.

La fonction f étant une fonction polynôme de degré 2, f est dérivable.

Ainsi : $f'(x) = 6 \times 2x - 640$

$f'(x) = 12x - 640$.

2) Rechercher la valeur de *x* pour laquelle *f* '(*x*) = 0.

Comme $f'(x) = 12x - 640$, $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{640}{12} = \frac{4 \times 160}{4 \times 3} = \frac{160}{3}$, soit $x \approx 53$.

3) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

$12x - 640 < 0 \Leftrightarrow 12x < 640 \Leftrightarrow x < \frac{160}{3}$, soit $f'(x) < 0$ pour $x < \frac{160}{3}$.

$12x - 640 > 0 \Leftrightarrow 12x > 640 \Leftrightarrow x > \frac{160}{3}$, soit $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{160}{3}$.

Le tableau de variation de la fonction f est donc le suivant.

x		$\frac{160}{3} \approx 53$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{237\,700}{3}$	↗

<u>Remarque</u> : $f(\frac{160}{3}) = 6 \times (\frac{160}{3})^2 - 640 \times \frac{160}{3} + 96\,300 = \frac{6 \times 25\,600}{9} - \frac{640 \times 160}{3} + 96\,300$

$f(\frac{160}{3}) = \frac{153\,600}{9} - \frac{102\,400}{3} + 96\,300 = \frac{153\,600}{9} - \frac{3 \times 102\,400}{3 \times 3} + \frac{9 \times 96\,300}{9}$

$f(\frac{160}{3}) = \frac{153\,600}{9} - \frac{307\,200}{9} + \frac{866\,700}{9} = \frac{153\,600 - 307\,200 + 866\,700}{9}$

$f(\frac{160}{3}) = \frac{713\,100}{9} = \frac{237\,700}{3}$.

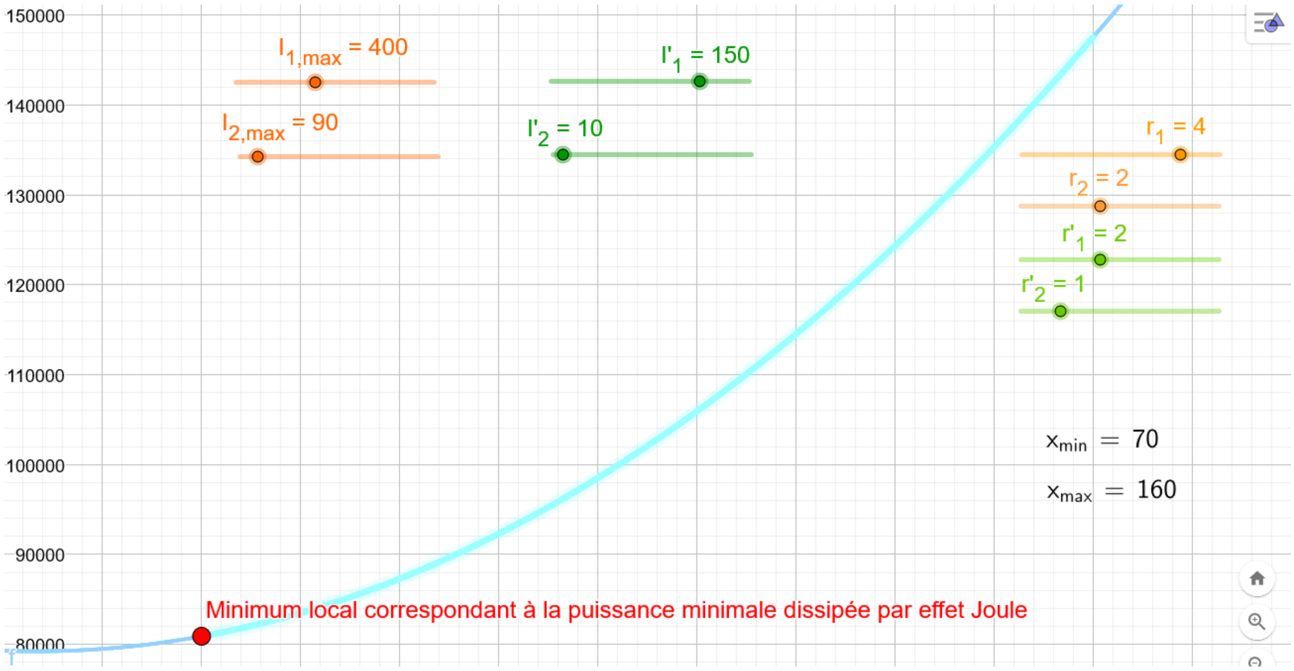
4) En déduire que la fonction *f* admet un minimum local atteint pour *x* = 70 dans l'intervalle [70 ; 160].

La fonction f admet pour minimum $\frac{237\,700}{3}$, qui est atteint en $x = \frac{160}{3}$.

Or $\frac{160}{3} \approx 53 < 70$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{160}{3}$. Le minimum local de la fonction f dans l'intervalle [70 ; 160] est donc la plus petite valeur de cet intervalle : $x = 70$.

 → p. 177 du manuel

Utilisation d'une application ou d'un logiciel dédié à la géométrie et à l'algèbre



1) Vérifier que la fonction *f* représentée est bien définie par $f(x) = 6x^2 - 640x + 96\,300$.

$$f(x) = r_1\,x^2 + r_2\,(I'_1 + I'_2 - x)^2 + r'_1\,I'^2_1 + r'_2\,I'^2_2$$

$$\rightarrow\ 4\,x^2 + 2\,(150 + 10 - x)^2 + 2 \cdot 150^2 + 1 \cdot 10^2$$

En développant, on retrouve bien : $f(x) = 6x^2 - 640x + 96\,300$.

2) Vérifier que le point rouge correspond bien au minimum de la fonction *f* sur l'intervalle [70 ; 160].

$$\text{Pmin} = \text{Min}(f, x_{min}, x_{max})$$

avec :

$$x_{min} = \text{Max}(0, I'_1 + I'_2 - I_{2,max}) \quad \text{et} \quad x_{max} = \text{Min}(I_{1,max}, I'_1 + I'_2)$$

(comme $I'_1 + I'_2 - I_{2,max} > 0$, $x_{min} = I'_1 + I'_2 - I_{2,max} = 70$ et comme $I'_1 + I'_2 < I_{1,max}$, $x_{max} = I'_1 + I'_2 = 160$).

3) Vérifier que, dans l'intervalle [70 ; 160], la fonction *f* admet pour minimum local 80 900, qui est atteint en $x = 70$.

$$\text{Pmin} = \text{Min}(f, x_{min}, x_{max}) \ \rightarrow\ (70, 80900)$$

4) Modifier les valeurs des grandeurs $I_{1,max}$, $I_{2,max}$, I'_1, I'_2, r_1, r_2, r'_1 et r'_2 avec les curseurs. Observer l'évolution de la représentation de la fonction *f*.

→ p. 177 du manuel

Utilisation de la forme canonique de la fonction *f*

1) Déterminer la forme canonique de la fonction *f* définie par $f(x) = 6x^2 - 640x + 96\,300$.

La fonction *f* étant une fonction du second degré, sa courbe représentative dans un repère est une parabole (et c'est une partie de parabole dans l'intervalle [70 ; 160]).

La forme canonique est une écriture de l'expression de la fonction *f* qui va permettre de déterminer les coordonnées du sommet de cette parabole et d'en déduire le minimum de *f*.

Ainsi : $f(x) = 6\left(x^2 - \frac{640}{6}x\right) + 96\,300 = 6\left(x^2 - \frac{320}{3}x\right) + 96\,300$

$$f(x) = 6\left[\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \left(\frac{160}{3}\right)^2\right] + 96\,300 = 6\left[\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \frac{25\,600}{9}\right] + 96\,300$$

$$f(x) = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \frac{6 \times 25\,600}{9} + 96\,300 = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \frac{2 \times 25\,600}{3} + 96\,300$$

$$f(x) = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \frac{51\,200}{3} + 96\,300 = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \frac{51\,200}{3} + \frac{3 \times 96\,300}{3}$$

$$f(x) = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 - \frac{51\,200}{3} + \frac{288\,900}{3} = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 + \frac{288\,900 - 51\,200}{3}$$

$$f(x) = 6\left(x - \frac{160}{3}\right)^2 + \frac{237\,700}{3}.$$

<u>Remarque</u> : cette expression de *f* peut être vérifiée par le calcul formel, par exemple avec la fonction FormeCanonique() de Geogebra.

2) En déduire le minimum de la fonction *f*.

La forme canonique de *f* indique que le sommet de la parabole qui représente la fonction *f* a pour coordonnées $\left(\frac{160}{3} ; \frac{237\,700}{3}\right)$.
De plus, comme "6", le coefficient de $\left(x - \frac{160}{3}\right)^2$, est positif, on sait que la fonction *f* admet en $x = \frac{160}{3}$ un minimum.

3) En déduire que la fonction *f* admet un minimum local atteint pour $x = 70$ dans l'intervalle [70 ; 160].

La fonction *f* admet pour minimum $\frac{237\,700}{3}$, qui est atteint en $x = \frac{160}{3}$.
Or $\frac{160}{3} \approx 53 < 70$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{160}{3}$.
Le minimum local de la fonction *f* dans l'intervalle [70 ; 160] est donc la plus petite valeur de cet intervalle : $x = 70$.