Chapitre 12

Synthèse – La musique ou l'art de faire entendre les nombres

Consonance de sons musicaux

- En musique, un intervalle entre deux sons est défini par le **rapport** (et non la différence) de leurs fréquences fondamentales.
- Deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 2/1 correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. L'intervalle qui les sépare s'appelle une **octave**.
- Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.
- Dans l'Antiquité, la construction des gammes était basée sur des fractions simples (2/1, 3/2, 4/3, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples étaient alors considérés comme les seuls à être **consonants**.
- Une quinte est un intervalle entre deux fréquences de rapport 3/2.

Exemple. La consonance d'un son A et d'un son B, dont les fréquences fondamentales sont f_A = 100 Hz et f_B = 125 Hz peut s'expliquer par le fait que l'intervalle entre ces deux sons est une fraction simple :

$$\frac{f_\mathrm{B}}{f_\mathrm{A}} = \frac{125}{100} = \frac{5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 4} = \frac{5}{4}$$

➞ activité 1

Gammes de Pythagore

Il existe différentes méthodes pour construire des gammes musicales, c'est-à-dire des ensembles finis de notes réparties sur une octave correspondant à des sons consonants et permettant de composer des mélodies.

- Les gammes de Pythagore sont basées sur le **cycle des quintes**. Pour des raisons mathématiques, ce cycle des quintes ne « reboucle » jamais sur la note de départ.

Exemple. Si on multiplie n fois la fréquence d'un Do par 3/2, il est impossible d'obtenir la fréquence de la note de départ à une, deux ou p octaves, donc un Do. En effet, si $f_{\mathrm{Do}} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n = f_{\mathrm{Do}} \times 2^p$ alors $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^p$ ce qui conduit à $3^n = 2^{n+p}$.

Cette égalité ne peut être vérifiée car un nombre impair ne peut pas être égal à un nombre pair. Il en découle que le cycle des quintes est infini.

- Cependant, les cycles de 5, 7 ou 12 quintes « rebouclent » presque. Pour les gammes associées, l'identification de la dernière note avec la première impose que l'une des quintes du cycle ne corresponde pas exactement à l'intervalle 3/2.

  ➞ activités 2 et 3

Gammes au tempérament égal

Pour qu'une œuvre musicale composée avec un instrument puisse être jouée par un autre instrument, il peut être nécessaire de décaler toutes les notes de la partition correspondant à cette œuvre.

- Les intervalles entre deux notes consécutives des gammes dites de Pythagore ne sont pas égaux, ce qui entrave la **transposition**.
- La connaissance des **nombres irrationnels** a permis, au XVII[e] siècle, de construire des gammes à intervalles égaux.

  ➞ activité 4

Mots clés

Rapport : division d'une grandeur par une autre.

Octave : rapport de $\frac{2}{1}$ entre les fréquences des signaux sonores correspondant à deux notes. Ces notes portent le même nom, mais sont distinguées par un numéro d'octave.

Consonants : se dit de sons qui présentent une affinité lorsqu'ils sont produits successivement ou simultanément, par opposition à ceux qui sont dissonants et provoquent une rupture d'harmonie, une sensation de malaise.

Cycle des quintes : représentation de l'enchaînement de notes obtenues par quintes montantes (ou descendantes) donc par multiplication (ou division) par $\frac{3}{2}$, ou $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$… de la fréquence du signal sonore correspondant à la première note puis division (ou multiplication) éventuelle de cette fréquence par 2, ou 2 × 2… pour parvenir à un rapport inférieur à l'octave.

Transposition : décalage de toutes les notes d'un morceau de musique d'un même intervalle.

Nombres irrationnels : nombres qui ne peuvent pas être mis sous la forme d'un rapport entre deux nombres entiers comme $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$.